הטכניון

מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למתמטיקה

בוחן אמצע - אלגברה 1מ' 104016
חורף תשע"ו

מספר סטודנט: _____ פקולטה: _____

- משך הבוחן: **2 שעות**.
- בבוחן **3 חלקים**. יש לפתור את כל השאלות בכל חלק.
- חלק א מכיל שלוש שאלות שמתייחסות למערכת משוואות ליניארית. יש לנמק היטב כל תשובה לשאלות אלה.
- חלק ב מכיל ארבע שאלות מסוג הוכח/הפרך. יש לנמק היטב כל תשובה לשאלות אלה.
- חלק ג מכיל 5 שאלות אמריקאיות. את התשובות יש לסמן בטבלה מצד שמאל למטה בדף זה.
- אין להשתמש בחומר עזר או מחשבון.
- אין להוסיף דפים.

(לשימוש הבודקים)

חלק א	
חלק ב	
חלק ג	
סה"כ נקודות	

חלק ג

1	
2	
3	
4	
5	

בהצלחה!

חלק א (24 נקודות)

נתונה מערכת משוואות עם משתנים x,y,z,w ופרמטרים a,b :

$$\begin{cases} x+2y+2z-2w=1 \\ x+2b^2w=2 \\ y+z+a^2w=5 \end{cases}$$

1. מעל $\mathbb{R}$, לאיזה ערכים של a ו b יש למערכת פיתרון יחיד?
   מעל $\mathbb{R}$, לאיזה ערכים של a ו b יש למערכת אינסוף פיתרונות?
   מעל $\mathbb{R}$, לאיזה ערכים של a ו b אין למערכת פיתרון?
2. מעל $\mathbb{C}$, לאיזה ערכים של a ו b יש למערכת פיתרון יחיד?
   מעל $\mathbb{C}$, לאיזה ערכים של a ו b יש למערכת אינסוף פיתרונות?
   מעל $\mathbb{C}$, לאיזה ערכים של a ו b אין למערכת פיתרון?
3. הציבו $a=0$ ו $b=2i$ ומצאו את כל הפיתרונות של המערכת.

אחרי דירוג:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2b^2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1-b^2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a^2+b^2 & 11/2 \end{array}\right)$$

1. מעל $\mathbb{R}$, תמיד יש אינסוף פיתרונות כי $1+a^2+b^2$ לא מתאפסת.
2. מעל $\mathbb{C}$, יש אינסוף פיתרונות כל עוד $1+a^2+b^2$ לא מתאפסת. יש להעיר שבמקרה זה $1+a^2+b^2$ יכול להתאפס: ניתן להציב כל מספר b ומקבלים $a=\sqrt{-1-b^2}$.
3. $\{(-38/3, 5-\alpha, \alpha, -11/6) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$

חלק ב (9 נקודות לכל סעיף)

בשאלות הבאות יש להוכיח את הטענה או להפרך את הטענה על ידי דוגמה נגדית.

1. יהיו A ו B שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר כך ש A סימטרית ומתקיים $A(B+B^t)=(B+B^t)A$. אזי גם המטריצה $AB-BA$ סמטרית.

נכון. נתון $A=A^t$

$$A(B+B^t)=(B+B^t)A \Rightarrow AB-BA=B^tA-AB^t=B^tA^t-A^tB^t=(AB-BA)^t$$

ולכן $AB-BA$ סימטרית.

2. יהיו A ו B שתי מטריצות שקולות שורות כך שלמערכת $Ax=c$ יש אינסוף פיתרונות. אזי למערכת $Bx=c$ יש אינסוף פיתרונות.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

לא נכון. לדוגמא $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$c=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. יהיו U ו W תתי מרחבים של מרחב וקטורי V. נניח ש $v \in U+W$ אבל $v \notin U$. אזי $v \in W$.

לא נכון. לדוגמא $V = R^2$; $U = span\{(1,0)\}$ ו $W = span\{(0,1)\}$ וקטור לא על הצירים.
והוקטור $(1,1) \in U+W$ לא ב U או W.

4. יהי $A = \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. תהי $U = \{b \in \mathbb{F}^n \mid Ax = b$ קיים פיתרון למערכת$\}$. אזי U תת מרחב של $\mathbb{F}^n$.

נכון. בודקים ש U מקיים את שלושת הקריטריונים:

1. למערכת $Ax = 0$ תמיד יש פיתרון ==> $0 \in U$.
2. $b,c \in U$ <== קיימים x,y כך ש $Ax = b$ ו $Ax = c$ <==
$A(x+y) = Ax + Ay = b + c \Leftarrow b + c \in U$.
3. $\lambda \in \mathbb{F}$, $b \in U$ $\Leftarrow$ קיים ס כך ש $Ax = b$ $\Leftarrow$ $A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda b \Leftarrow \lambda b \in U$.

חלק ג (8 נקודות לכל סעיף)

בסעיפים הבאים יש לסמן בטבלה את התשובות הנכונות. בסוף יש להעתיק את התשובות לדף הראשי של הבוחן.

1	ג
2	ד
3	ב
4	ד
5	ה

1. יהי $f(x)=x^5-x^4-x^3+x^2-2x+2$. שימו לב ש $f(i)=0$. אזי

א. ל $f(x)$ יש בדיוק שורש ממשי יחיד.

ב. ל $f(x)$ יש בדיוק שני שורשים ממשיים.

ג. ל $f(x)$ יש בדיוק שלושה שורשים ממשיים.

ד. מכפלת כל השורשים היא 2.

ה. הסכום של כל השורשים הממשיים הוא 2.

2. יהי $A\in\mathbb{R}^{5\times 3}$ ונניח ש $r(A)=3$. אזי

א. קיים $b\in\mathbb{R}^5$ כך שלמערכת $Ax=b$ יש אינסוף פיתרונות.

ב. למערכת $Ax=0$ יש אינסוף פיתרונות.

ג. לכל $b\in\mathbb{R}^5$ למערכת יש לפחות פיתרון אחד.

ד. לכל מטריצה $B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש $r(B)=3$ למערכת $(AB)x=0$ יש פיתרון יחיד.

ה. לכל מטריצה $B\in R^{5\times 5}$ כך ש $r(B)=5$ למערכת $(BA)x=0$ יש אינסוף פיתרונות.

3. יהיו z_1,z_2,z_3 שלולת הפיתרונות של המשוואה $z^3+1=i\sqrt{3}$. אזי

א. $z_1^3+z_2^3+z_3^3=10$.

ב. $z_1^9+z_2^9+z_3^9$ מספר ממשי.

ג. $i\cdot z_1^9\cdot z_2^9\cdot z_3^9$ מספר ממשי.

ד. $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot(i-2)=3$.

ה. $|z_1-z_3||z_2-z_3||z_1-z_2|=1$.

4. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו U,W,Z תתי מרחבים לא טריוואליים של V. אזי

א. $(U+W)\cap Z=(U\cap Z)+(W\cap Z)$.

ב. $(U\setminus W)\cup\{0\}$ תת מרחב של V. ($U\setminus W$ מסמן את כל האיברים ב- U שהם אינם ב- W)

ג. אם $V=U\oplus W$ וגם $V=U\oplus Z$ אז $W=Z$.

ד. אם $U\cap W=U$ אז $U+W=W$.

ה. אם $U\cap W=\{0\}$ אזי $U\oplus W=V$.

5. יהי $V=\mathbb{R}_5[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 5 עם מקדמים ב $\mathbb{R}$. סמנו את הקבוצה המהווה תת מרחב של V.

א. אוסף כל הפולינומים ב- V שיש להם שורש ממשי.

ב. אוסף כל הפולינומים ב- V מהצורה $ax^5+2ax^3+|a|$ כך ש $a\in R$.

ג. אוסף כל הפולינומים ב- V בשהמקדם החופשי שלהם הוא 7.

ד. אוסף כל הפולינומים ב- V עבורם 7 הוא לא שורש שלהם.

ה. אוסף כל הפולינומים ב- V עבורם 7 הוא שורש מריבוי לפחות 2.